NOUVELLE MANIERE
DE
COMPARER LES OBSERVATIONS DE LA LUNE AVEC LA THÉORIE. (*)

PAR MR. L. EULER.

J'ai proposé autrefois une méthode toute particuliere de déterminer par la Théorie les dérangemens que les mouvemens des corps céléstes souffrent de leur action mutuelle; cette méthode est immédiatement fondée sur les formules différentielles du second degré, que la Théorie fournit pour la détermination du mouvement, sans qu'on ait besoin d'en chercher préalablement les intégrales. Pour cet effet je suppose d'abord, que tant le lieu du corps dont il est question, que son mouvement, c'est à dire, sa vitesse avec sa direction, soient exactement connus pour une époque donnée: ensuite, sachant pour ce même tems les accélérations que les forces qui agissent alors sur le corps y produisent, j'ai fait voir comment on peut de là assigner le lieu & le mouvement de ce corps, non seulement pour un instant après, mais pour un tems assez considérable écoulé depuis la premiere époque. Cependant ce tems ne doit pas être pris trop grand, de peur que l'aberration, qui croît avec le tems, ne devienne sensible; mais, dès qu'on y est arrivé, on n'a qu'à répéter les mêmes opérations pour parvenir à un moment deux fois plus éloigné de la premiere époque: & ainsi on pourra continuer le même calcul aussi loin qu'on voudra.

En se servant de cette méthode, on suit presque pas à pas le corps céleste dans son mouvement; & quand même on n'en pourroit

(*) Lû le 6 Févr. 1766.

eſpérer de grands ſecours pour l'Aſtronomie, il ſeroit toujours fort important de connoître tous les dérangemens auxquels le corps eſt aſſujetti d'un inſtant à l'autre; cette même connoiſſance ne laiſſeroit pas de nous éclairer très conſidérablement ſur cet intéreſſant article de l'Aſtronomie.

Je crois qu'il ne ſeroit pas inutile d'appliquer cette méthode à la détermination du mouvement de la Lune; car, quoique les Tables Lunaires ſoient portées à un tel degré de perfection, qu'on ne ſauroit preſque eſpérer d'en pouſſer plus loin la préciſion, il n'eſt pas ſi aiſé d'en tirer pour chaque inſtant les changemens qui ſont cauſés tant dans la viteſſe que dans la direction de la Lune: & on n'en ſauroit même conclure ces élémens que par voie d'approximation, attendu qu'on eſt obligé de tenir compte de toutes les inégalités qui ſe trouvent dans les Tables. Mais, ſuivant cette nouvelle méthode, on parvient d'abord à la connoiſſance de ces deux élémens, ſans avoir beſoin d'aucune approximation. Ce qui étant un article très eſſentiel dans la connoiſſance du mouvement de la Lune, on a tout lieu d'eſpérer, qu'en pourſuivant cette méthode avec tous les ſoins poſſibles, on y découvrira des reſſources auxquelles on ne s'attendoit pas, & que c'eſt preſque le plus ſûr moyen pour porter la Théorie de la Lune au plus haut degré de perfection.

Pour cet effet, il faut commencer par connoître très exactement tant le lieu que le mouvement de la Lune pour une époque donnée, d'où l'on puiſſe enſuite pourſuivre la Lune preſque pas à pas: & partant on comprendra aiſément, que la moindre erreur commiſe dans ces deux élémens doit avec le tems produire des erreurs très groſſieres, quoiqu'on puiſſe eſpérer de remédier à cet inconvénient, dès qu'on s'appliquera à cette recherche. Pour moi, je dois avouer que je ne me ſens plus ni le courage ni la patience néceſſaires pour entreprendre un travail de cette nature: mais ayant réfléchi ſur les différentes opérations qui y ſont néceſſaires, j'ai trouvé moyen, en employant pluſieurs obſervations de la Lune, faites pendant pluſieurs jours conſécuti-

cuti-

cutivement, d'en constater pour le moment de chacune la véritable vitesse & direction de la Lune, de sorte qu'on pourra établir ensuite par-là des époques pour y appliquer la méthode mentionnée.

LEMME.

Connoissant pour les abscisses $\zeta = 0$, $\zeta = 1$, $\zeta = 2$, $\zeta = 3$, $\zeta = 4$ etc. les appliquées p, q, r, s, t etc. d'une courbe, trouver les valeurs différentielles tant du premier degré $\frac{dp}{d\zeta}$, $\frac{dq}{d\zeta}$, $\frac{dr}{d\zeta}$, $\frac{ds}{d\zeta}$ etc. que du second degré $\frac{ddp}{d\zeta^2}$, $\frac{ddq}{d\zeta^2}$, $\frac{ddr}{d\zeta^2}$, $\frac{dds}{d\zeta^2}$ etc. en prenant constant le différentiel $d\zeta$.

SOLUTION.

Soit z l'appliquée qui répond à l'abscisse indéfinie ζ; & posant $q - p = \Delta p$; $r - 2q + p = \Delta^2 p$; $s - 3r + 3q - p = \Delta^3 p$ etc. valeurs qu'on trouve aisément en prenant les différences de la série des appliquées, tant les premieres que les secondes, troisiemes etc. Cela posé, on sait qu'on aura:

$$z = p + \Delta p.\frac{\zeta}{1} + \Delta^2 p.\frac{\zeta(\zeta-1)}{1.2} + \Delta^3 p.\frac{\zeta(\zeta-1)(\zeta-2)}{1.\ 2.\ 3} \text{ etc. ou}$$

$$z = p + \Delta p.\zeta + \tfrac{1}{2}\Delta^2 p.(\zeta\zeta - \zeta) + \tfrac{1}{6}\Delta^3 p(\zeta^3 - 3\zeta^2 + 2\zeta)$$
$$+ \tfrac{1}{24}\Delta^4 p(\zeta^4 - 6\zeta^3 + 11\zeta^2 - 6\zeta)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\Delta^5 p(\zeta^5 - 10\zeta^4 + 35\zeta^3 + 50\zeta^2 + 24\zeta)$$

etc.

De là il est aisé de tirer les valeurs différentielles de tous les ordres, & pour le premier & second nous aurons:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \Delta p + \tfrac{1}{2}\Delta^2 p(2\zeta - 1) + \tfrac{1}{6}\Delta^3 p(3\zeta\zeta - 6\zeta + 2)$$
$$+ \tfrac{1}{24}\Delta^4 p(4\zeta^3 - 18\zeta^2 + 22\zeta - 6)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\Delta^5 p(5\zeta^4 - 40\zeta^3 + 105\zeta^2 - 100\zeta + 24)$$
etc.

$$\frac{ddz}{d\zeta^2} = \Delta^2 p + \Delta^3 p.(\zeta - 1) + \tfrac{1}{12}\Delta^4 p.(6\zeta\zeta - 18\zeta + 11)$$
$$+ \tfrac{1}{12}\Delta^5 p(2\zeta^3 - 12\zeta\zeta + 21\zeta - 10).$$

Maintenant, poſant ſucceſſivement $\zeta = 0$, $\zeta = 1$, $\zeta = 2$, etc. nous aurons ces valeurs différentielles pour les appliquées déterminées p, q, r, s etc.

du premier ordre:

$$\frac{dp}{d\zeta} = \Delta p - \tfrac{1}{2}\Delta^2 p + \tfrac{1}{3}\Delta^3 p - \tfrac{1}{4}\Delta^4 p + \tfrac{1}{5}\Delta^5 p - \text{etc.}$$

$$\frac{dq}{d\zeta} = \Delta p + \tfrac{1}{2}\Delta^2 p - \tfrac{1}{6}\Delta^3 p + \tfrac{1}{12}\Delta^4 p - \tfrac{1}{20}\Delta^5 p + \text{etc.}$$

$$\frac{dr}{d\zeta} = \Delta p + \tfrac{3}{2}\Delta^2 p + \tfrac{1}{3}\Delta^3 p - \tfrac{1}{12}\Delta^4 p + \tfrac{1}{30}\Delta^5 p$$

$$\frac{ds}{d\zeta} = \Delta p + \tfrac{5}{2}\Delta^2 p + \tfrac{11}{6}\Delta^3 p + \tfrac{1}{4}\Delta^4 p - \tfrac{1}{20}\Delta^5 p$$

du ſecond ordre:

$$\frac{ddp}{d\zeta^2} = \Delta^2 p - \Delta^3 p + \tfrac{11}{12}\Delta^4 p - \tfrac{5}{6}\Delta^5 p$$

$$\frac{ddq}{d\zeta^2} = \Delta^2 p \quad \bullet \quad - \tfrac{1}{12}\Delta^4 p + \tfrac{1}{12}\Delta^5 p$$

$$\frac{ddr}{d\zeta^2} = \Delta^3 p + \Delta^3 p - \tfrac{1}{12}\Delta^4 p \quad \bullet$$

$$\frac{dds}{d\zeta^2} = \Delta^2 p + 2\Delta^3 p + \tfrac{11}{12}\Delta^4 p - \tfrac{1}{12}\Delta^5 p.$$

En-

Enſuite du troiſieme ordre:

$$\frac{d^3 p}{d\zeta^3} = \Delta^3 p - \tfrac{3}{2}\Delta^4 p + \tfrac{7}{4}\Delta^5 p$$

$$\frac{d^3 q}{d\zeta^3} = \Delta^3 p - \tfrac{1}{2}\Delta^4 p + \tfrac{1}{4}\Delta^5 p$$

$$\frac{d^3 r}{d\zeta^3} = \Delta^3 p + \tfrac{1}{2}\Delta^4 p - \tfrac{1}{4}\Delta^5 p$$

$$\frac{d^3 s}{d\zeta^3} = \Delta^3 p + \tfrac{3}{2}\Delta^4 p + \tfrac{1}{4}\Delta^5 p,$$

& du quatrieme ordre:

$$\frac{d^4 p}{d\zeta^4} = \Delta^4 p - 2\Delta^5 p$$

$$\frac{d^4 q}{d\zeta^4} = \Delta^4 p - \Delta^5 p$$

$$\frac{d^4 r}{d\zeta^4} = \Delta^4 p \quad \cdot$$

$$\frac{d^4 s}{d\zeta^4} = \Delta^4 p + \Delta^5 p.$$

Ce Lemme nous ſera d'un grand uſage dans la comparaiſon de pluſieurs lieux obſervés de la Lune, puiſque par ſon moyen nous ſerons en état d'aſſigner pour chaque lieu les valeurs différentielles, qui s'y rapportent: or celles du ſecond ordre ne ſont que l'effet des forces qui agiſſent ſur la Lune, ce qui nous met en état de comparer les obſervations avec la Théorie. Je m'en vai donc conſidérer les formules différentielles, que la Théorie fournit pour le mouvement de la Lune.

FORMULES DIFFÉRENTIELLES
qui expriment le mouvement de la Lune.

Pl. VIII. Fig. 3. Soit A le centre de la Terre, & AB une ligne fixe tirée vers l'équinoxe du printems; Z le centre de la Lune, d'où l'on abaisse au plan de l'écliptique la perpendiculaire ZY, & de Y à AB la perpendiculaire YX. Posons

1°. la distance $AZ = v$;

2°. la latitude de la Lune $ZAY = \psi$ boréale;

3°. la longitude de la Lune $YAX = \phi$.

De ces trois élémens donnés par les observations on définira les trois coordonnées $AX = x$; $XY = y$, & $YZ = z$, de cette sorte:

$$z = v \sin\psi;\ AY = v \cos\psi;\ y = v \cos\psi \sin\phi;\ x = v \cos\psi \text{ c.}\phi.$$

En même tems soit S le lieu du Soleil, sa distance à la Terre $AS = u$, & sa longitude $BAS = \theta$, d'où l'on tire $AR = u \cos\theta$ & $RS = u \sin\theta$.

Maintenant, posant la distance de la Lune au Soleil $SZ = w$, on aura $w^2 = (u \cos\theta - x)^2 + (u \sin\theta - y)^2 + zz$,

ou bien $w^2 = uu - 2uv \cos\psi (\cos\theta \cos\phi + \sin\theta \sin\phi) + vv$,

ou $w^2 = uu - 2uv \cos\psi \cos(\phi - \theta) + vv$.

Soit t le tems écoulé depuis une certaine époque jusqu'à cette observation, pendant lequel le mouvement moyen du Soleil soit l'angle $= \tau$, qu'on exprime en parties du rayon 1; & posons la distance moyenne du Soleil à la Terre $= k$. Enfin, soit A à B comme la masse de la Terre à celle du Soleil, & la Théorie fournit pour le mouvement de la Lune ces trois formules:

$$\text{I. } \frac{ddx}{d\tau^2} = \frac{-Ak^3}{A+B} \cdot \frac{x}{v^3} + \frac{k^3 (u \cos\theta - x)}{w^3} - \frac{k^3 \cos\theta}{uu} = -P$$

II.

$$\text{II. } \frac{ddy}{d\tau^2} = \frac{-Ak^3}{A+B} \cdot \frac{y}{v^3} + \frac{k^3(u \sin\theta - y)}{w^3} - \frac{k^3 \sin\theta}{uu} = -Q$$

$$\text{III. } \frac{ddz}{d\tau^2} = \frac{-Ak^3}{A+B} \cdot \frac{z}{v^3} - \frac{k^3 z}{w^3} = -R.$$

Réflexions ſur ces formules.

I. Ayant donc exactement obſervé le lieu de la Lune avec ſa parallaxe horizontale, on pourra déterminer par-là les quantités v, x, y, z, & ſachant par la Théorie du Soleil ſa diſtance u avec ſa longitude θ, on en tirera la diſtance $w = SZ$. De là, en regardant la fraction $\frac{A}{A+B} = \lambda$ comme connue, on calculera aiſément ces trois valeurs:

$$P = \lambda \frac{k^3 x}{v^3} - \frac{k^3(u \cos\theta - x)}{w^3} + \frac{k^3 \cos\theta}{uu}$$

$$Q = \lambda \frac{k^3 y}{v^3} - \frac{k^3(u \sin\theta - y}{w^3} + \frac{k^3 \sin\theta}{uu}$$

$$R = \lambda \frac{k^3 z}{v^3} + \frac{k^3 z}{w^3}$$

d'où l'on aura les trois égalités ſuivantes:

$$\frac{ddx}{d\tau^2} = -P; \quad \frac{ddy}{d\tau^2} = -Q \quad \& \quad \frac{ddz}{d\tau^2} = -R.$$

II. La Théorie nous fournit donc les valeurs différentio-différentielles des trois coordonnées x, y, z, rapportées au mouvement moyen du Soleil, qui nous ſert de meſure du tems. Donc, ſi nous voulons exprimer le tems en jours, en poſant le nombre des jours $= \zeta$, puiſque le mouvement moyen du Soleil dans un jour eſt $= 0{,}0172028$, ſi nous poſons cette fraction connue $= n = 0,$

0172028, de ſorte que $ln = 8,2355992$, nous aurons $d\tau = n d\zeta$, & partant.

$$\frac{ddx}{d\zeta^2} = -nnP; \quad \frac{ddy}{d\zeta^2} = -nnQ; \quad \frac{ddz}{d\zeta^2} = -nnR.$$

III. Or, en employant pluſieurs obſervations de la Lune, dont les intervalles de tems ſoient tous d'un jour, ſi nous prenons x, y, z, P, Q, R, pour la premiere de ces obſervations, & que pour les ſuivantes nous conſervions les mêmes lettres en y ajoutant les ſignes ′, ″, ‴, etc. par le moyen du lemme précédent, nous en pourrons conclure les valeurs différentielles $\frac{ddx}{d\zeta^2}$, $\frac{ddy}{d\zeta^2}$, $\frac{ddz}{d\zeta^2}$; leſquelles devant être égales aux quantités $-nnP$, $-nnQ$, nnR, on verra juſqu'à quel point de précifion les obſervations ſeront d'accord avec la Théorie, & cela ſans ſe ſervir d'aucunes Tables Lunaires. Cette maniere de comparer les obſervations avec la Théorie mérite d'autant plus d'attention, qu'elle eſt tirée immédiatement des formules différentielles fournies par la Théorie; pendant que les Tables n'en ſont formées que par approximation, & qu'elles renferment encore pluſieurs élémens conclus par les ſeules obſervations: comme le mouvement moyen, l'excentricité de l'orbite, & ſon inclinaiſon moyenne à l'écliptique. Or, dans cette maniere de comparer les obſervations avec la Théorie, nous n'avons beſoin d'aucun de ces élémens.

IV. Mais remarquons que nos formules renferment la fraction $\lambda = \frac{A}{A + B}$, dont nous ne ſaurions connoitre la véritable valeur que par les obſervations: mais nous voyons auſſi qu'une ſeule équation nous en découvre la véritable valeur; & comme chaque obſervation donne trois équations, cette détermination ſera d'autant plus certaine, ſurtout quand nous y employerons pluſieurs obſervations. Par ce moyen nous découvrirons bien plus ſurement le véritable rapport entre

entre la maſſe du Soleil B & celle de la Terre A, que par la méthode dont on s'eſt ſervi juſqu'ici pour cet effet.

V. Enſuite on remarquera que, pour faire uſage de nos formules, il faut connoitre le vrai rapport entre les diſtances du Soleil & de la Lune à la Terre, u & v, qui eſt inconnu ſans doute tant qu'on ne découvre point la parallaxe du Soleil. Mais conſidérant comme connue la parallaxe du Soleil dans ſa moyenne diſtance k, puiſque les obſervations nous donnent la parallaxe de la Lune, nous en tirerons d'abord le rapport entre les diſtances k & v, & celui qu'il y a entre k & u eſt donné par la Théorie du Soleil, ce qui ſuffit pour développer nos formules. Or on ſait que la parallaxe du Soleil n'entre que pour fort peu dans le mouvement de la Lune, & partant il ſuffira de la connoitre à peu près. Je ſuppoſerai donc la parallaxe du Soleil de $9''$, & ſa diſtance moyenne à la Terre $k = 100000$; & dans la même meſure j'exprimerai la diſtance de la Lune à la Terre.

VI. On pourroit faire encore une autre hypotheſe en ſuppoſant la parallaxe du Soleil de $8''$, ou de $10''$, & calculer ſéparément pluſieurs obſervations ſur nos formules pour voir quelle différence il en réſulte: ce qui nous conduiroit peut-être à la route la plus ſure pour déterminer exactement la parallaxe du Soleil. Mais on comprendra aiſément que, pour cet effet, il faudroit employer des obſervations ſi exactes, que l'erreur n'en ſurpaſſât point quelques ſecondes, ce qui rend l'exécution de ce deſſein preſque impoſſible, à moins qu'en appliquant le même calcul à un très grand nombre d'obſervations, on n'en pût tirer enfin une concluſion aſſez certaine.

VII. Mais je m'en tiendrai ici au premier deſſein, où il ne s'agit que de comparer les obſervations de la Lune avec la Théorie, ſans aucun ſecours des Tables, & je ſuppoſerai la parallaxe du Soleil $= 9''$ dans ſa moyenne diſtance $k = 100000$, & partant tout revient à trouver de bonnes obſervations de la Lune. Or, puiſque les Tables de feu M. *Meyer* ſont reconnues pour donner les lieux de la Lune à une minute près, & que les Connoiſſances des mouvemens céleſtes de Mr.

 de la

de la Lande ſont calculées ſur ces Tables, je regarderai les lieux de la Lune qui y ſont aſſignés pour chaque midi, comme des obſervations immédiates: vu que des obſervations actuelles pourroient bien être moins exactes. Outre cela, j'en retirerai auſſi cet avantage, que tous les intervalles de tems entre ces obſervations ſont égaux entr'eux & préciſément de 24 heures, ce qui fournit une grande commodité pour le calcul, que j'ai déjà arrangé en ſorte que l'unité, par laquelle je meſure le tems, eſt un jour, qui donne en même tems les intervalles égaux pris ſur l'axe de la courbe conſidérée dans le Lemme.

VIII. Ayant donc tiré de la Connoiſſance des mouvemens céleſtes de l'an 1765, ſix lieux de la Lune depuis le 31 Juillet juſqu'au 5 Août, j'ai calculé pour chacun les trois coordonnées x, y, z, pour en conclure leurs valeurs différentielles du ſecond degré, dont voici le calcul:

	x	Δx	$\Delta^2 x$	$\Delta^3 x$	$\Delta^4 x$	$\Delta^5 x$
Juil. 31	113,69					
		53,28				
Août 1	166,97		−10,16			
		43,12		−2,36		
2	210,09		−12,52		+0,67	
		30,60		−1,69		+0,17
3	240,69		−14,21		+0,84	
		16,39		−0,85		
4	257,08		−15,06			
		1,33				
5	258,41					

d'où je tire pour la ſeconde obſervation du 1 Août la valeur différentielle:

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}\zeta^2} = \Delta^2 x - \tfrac{1}{12}\Delta^4 x + \tfrac{1}{12}\Delta^5 x = -\ 10,20.$$

Or, pour cette même obſervation, je trouve $P = \alpha\lambda - 290,1$ où $l\alpha = 10,0356834$; donc $lnn\alpha = 6,5068818$ & $290,1\,nn = 0,086$, de ſorte que

$$-\ 10,20 = -\ nn\alpha\lambda + 0,086 \quad \& \quad nn\alpha\lambda = 10,286,$$

& partant $\frac{1}{\lambda} = 312346$ ou $l\lambda = 4,5053647$.

IX.

IX. De la même maniere je fais le calcul pour les coordonnées y:

	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
Juil. 31	−219,005					
		+34,966				
Août 1	−184,039		+11,075			
		+46,041		−2,532		
2	−137,998		+8,543		−1,475	
		+54,584		−4,007		+1,945
3	− 83,414		+4,536		−10,470	
		+59,120		−3,537		
4	− 24,294		+0,999			
		+60,119				
5	+ 35,825					

d'où $\frac{ddy'}{d\zeta^2} = +\ 11,360$. Or $Q = -\ \beta\lambda + 372,7$, où $l\beta = 10,0779488$; donc $lnn\beta = 6,5491472$ & $372,7\,nn = 0,1103$. Par conséquent $11,360 = \beta nn\lambda - 0,1103$ ou $\beta nn\lambda = 11,470$, & partant $\frac{1}{\lambda} = 308730$ ou $l\lambda = 4,5104162$.

X. Pour la troisieme coordonnée z, nous aurons

	z	Δz	$\Delta^2 z$	$\Delta^3 z$	$\Delta^4 z$	$\Delta^5 z$
Juil. 31	−14,5543					
		+4,7998				
Août 1	− 9,7545		+0,6234			
		+5,4232		−0,3670		
2	− 4,3313		+0,2564		+0,0325	
		+5,6796		−0,3345		−0,0619
3	+ 1,3483		−0,0781		−0,0294	
		+5,6015		−0,3639		
4	+ 6,9498		−0,4420			
		+5,1595				
5	+12,1093					

Donc $\frac{ddz'}{d\zeta^2} = 0,6234 - 0,0027 - 0,0051 = 0,6156$. Or $R = -\ \gamma\lambda - 9,274$ & $l\gamma = 8,8022397$, donc $lnn\gamma = 5,2734381$ & $9,274\,nn = 0,00274$ & partant $0,6156 = nn\gamma\lambda + 0,00274$ ou $nn\gamma\lambda = 0,61286$. Par conséquent $\frac{1}{\lambda} = 306250$ & $l\lambda = 4,5139232$.

CONCLUSIONS.

1. Voilà donc trois valeurs que les ſix obſervations choiſies nous fourniſſent pour la fraction λ, qui à la vérité ne ſont pas trop d'accord entr'elles, mais la différence n'eſt pas pourtant ſi grande, qu'elle ne puiſſe être attribuée aux erreurs des obſervations, en ſuppoſant même que ces erreurs ne ſurpaſſent point une minute. Le milieu entre ces trois valeurs étant $\frac{1}{\lambda} = 309108$, on en peut conclure avec aſſez d'aſſurance, que la maſſe du Soleil ſurpaſſe 309108 fois la maſſe de la Terre, en ſuppoſant la parallaxe du Soleil de $9''$. Si l'on vouloit ſe donner la peine de faire le même calcul ſur d'autres obſervations, & prendre le milieu des trois réſultats qu'on en tire, on parviendroit à un rapport plus exact entre la maſſe du Soleil & celle de la Terre.

2. *Newton*, en ſuppoſant la parallaxe du Soleil de $10''$, trouve le rapport de la maſſe du Soleil à celle de la Terre comme 227512 à 1: qui pour la parallaxe de $9''$ devroit être augmenté en raiſon de 1000 à 729, d'où ce rapport ſeroit de 312088 à 1, ce qui s'accorde aſſez bien avec ce que je viens de trouver. Or, puiſque *Newton* a tiré ſa détermination du mouvement moyen de la Lune, elle eſt ſans doute plus exacte que celle que j'ai trouvée ici.

3. Ayant trouvé la véritable valeur du nombre λ, on ſera en état d'exécuter les opérations que j'ai propoſées autrefois, par le moyen deſquelles, en connoiſſant le lieu & le mouvement de la Lune pour une époque donnée, on peut déterminer les mêmes choſes pour un autre tems qui n'en eſt pas trop éloigné, comme pour le jour ſuivant. Car, ſoient pour l'époque donnée la diſtance de la Lune à la Terre $= v$, les trois coordonnées x, y, z, leur valeurs différentielles $\frac{dx}{d\zeta}$, $\frac{dy}{d\zeta}$ & $\frac{dz}{d\zeta}$; & pour un tems de ζ jours après, poſant les trois coordonnées X, Y, Z, on aura:

X =

$$X = x + \frac{\zeta dx}{d\zeta} + \frac{\zeta^2 ddx}{2d\zeta^2} + \frac{\zeta^3 d^3x}{6d\zeta^3} + \frac{\zeta^4 d^4x}{24d\zeta^4} + \text{etc.}$$

$$\& \quad \frac{dX}{d\zeta} = \frac{dx}{d\zeta} + \frac{\zeta ddx}{d\zeta^2} + \frac{\zeta^2 d^3x}{2d\zeta^3} + \frac{\zeta^3 d^4x}{6d\zeta^4} + \text{etc.}$$

Or, la Théorie donnant $\frac{ddx}{d\zeta^2} = -nnP$, $\frac{ddy}{d\zeta^2} = -nnQ$ & $\frac{ddz}{d\zeta^2} = -nnR$, on obtient

$$X = x + \frac{\zeta dx}{d\zeta} - \frac{nn\zeta^2 P}{2} - \frac{nn\zeta^3 dP}{6d\zeta} - \frac{nn\zeta^4 ddP}{24d\zeta^2} \text{ etc.}$$

$$\& \quad \frac{dX}{d\zeta} = \frac{dx}{d\zeta} - nn\zeta P - \frac{nn\zeta^2 dP}{2d\zeta} - \frac{nn\zeta^3 ddP}{6d\zeta^2} \text{ etc.}$$

& ainsi des autres coordonnées.

4. Maintenant, ayant pour le midi du premier d'Août 1765 à Paris,

$$x = +166{,}970; \quad y = -184{,}039; \quad z = -9{,}7545$$

& de là par les observations:

$$\frac{dx}{d\zeta} = +36{,}09; \quad \frac{dy}{d\zeta} = +40{,}316; \quad \frac{dz}{d\zeta} = +5{,}1982.$$

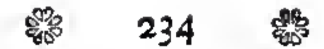
Ensuite nous avons

$$P = +34496; \quad Q = -37968; \quad R = -2041{,}4$$

& par les observations rapportées on pourroit encore trouver les valeurs différentielles de P, Q, R.

De là, pour ζ jours après le 1 Août, on aura

$$X = +166{,}970 + 36{,}090\zeta - 5{,}104\zeta\zeta$$
$$Y = -184{,}039 + 40{,}316\zeta + 5{,}618\zeta\zeta$$
$$Z = -9{,}7545 + 5{,}1982\zeta + 0{,}3020\zeta\zeta$$



& les valeurs différentielles

$$\frac{dX}{d\zeta} = + \; 36,090 \; - \; 10,208\,\zeta$$

$$\frac{dY}{d\zeta} = + \; 40,316 \; + \; 11,236\,\zeta$$

$$\frac{dZ}{d\zeta} = + \; 5,1982 \; + \; 0,6041\,\zeta.$$

5. J'obſerve donc que ſi l'on ne veut ſe ſervir que des trois premiers termes des formules pour X, Y, Z, on ne ſauroit paſſer par un intervalle d'un jour entier, puiſque les termes négligés ſeroient encore trop conſidérables. Il ne conviendroit donc point de prendre ces intervalles plus grands que de 2 heures; on les pourroit prendre plus grands, ſi l'on vouloit encore introduire dans le calcul les valeurs $\frac{dP}{d\zeta}$, $\frac{dQ}{d\zeta}$, $\frac{dR}{d\zeta}$, mais alors le calcul même deviendroit plus embarraſſé.



Fig. 1.

E A B C F

M N

b c

B C

a d

A D

Y Y' Y'' Y'''

Fig. 2.

O X X' X'' X''' L

Z

Fig. 3.

Y S

A X R B